



TITLE:

2. Bethe AnsatzとSoliton(IV. 量子論と統計力学,ソリトン系のダイナミックスとそれに関するカオスの問題,基研長期研究会報告)

AUTHOR(S):

飛田, 和男

CITATION:

飛田, 和男. 2. Bethe AnsatzとSoliton(IV. 量子論と統計力学,ソリトン系のダイナミックスとそれに関するカオスの問題,基研長期研究会報告). 物性研究 1983, 40(1): 88-92

ISSUE DATE:

1983-04-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/90891>

RIGHT:

文 献

- 1) L. A. Takhtadzhian and L. D. Faddeev, Russian Math. Surveys **34** (1979) 11.
K. Sogo, M. Uchinami, A. Nakamura and M. Wadati, Prog. Theor. Phys. **66** (1981) 1284.
- 2) K. Sogo and M. Wadati, Prog. Theor. Phys. **68** (1982) 85.
A. B. Zamolodchikov and V. A. Fateev, Sov. J. Nucl. Phys. **32** (1980) 298.
K. Sogo and Y. Akutsu, preprint.
また本号の阿久津氏による報告も参照。
- 3) M. Sato, T. Miwa and M. Jimbo, Publ. RIMS **16** (1980) 531.
神保・三輪, 「数学」**32** (1980) 289.
- 4) B. M. McCoy and T. T. Wu, Nucl. Phys. **B180** (1981) 89.
B. M. McCoy, T. T. Wu, C. A. Tracy and E. Baruch, Phys. Rev. **B13** (1976) 316.
B. M. McCoy, C. A. Tracy and T. T. Wu, Phys. Rev. Lett. **38** (1977) 793.
- 5) R. Z. Bariev, Phys. Lett. **55A** (1976) 456.
- 6) C. Itzykson, Nucl. Phys. **B210** (1982) 448.
- 7) H. B. Thacker, Lecture Notes in Physics **151** (Springer)
K. Sogo and M. Wadati, Prog. Theor. Phys. **69** (1983).

Bethe Ansatz と Soliton

北大・工 飛 田 和 男

§1. 序

古典一次元系では、逆散乱法等によって、いくつかの完全可積分系が知られ、その多くでソリトンが存在する。一方、量子一次元系については、古くから Bethe Ansatz で解ける例が知られていた。近年、この Bethe Ansatz は逆散乱法の量子化に他ならないことが明らかにされてきた。ここでは、量子系におけるソリトンに焦点をあて、Bethe Ansatz 及び、それを用いた統計力学を紹介し、あわせて、量子サイン・ゴールドン系へ適用した結果を紹介する。

§2. Bethe Ansatz

この節及び次節においては、最も簡単で、ソリトンをもつ例として、 δ -関数形の2体力で相互作用している一次元ボーズ系¹⁾を考える。ハミルトニアンは($\hbar = 1$)

$$H = \int [\partial_x \phi^* \partial \phi_x + C \phi^* \phi^* \phi \phi] dx \quad (1)$$

で与えられる。 ϕ はボーズ演算子である。この時 ϕ のみたすハイゼンベルグの運動方程式は、ボーズ量子化された非線型シュレーディンガー方程式となる。この系の 2 体波動関数は、座標が異ると相互作用がないから

$$\chi_{k_1 k_2}(x_1, x_2) = \{ \theta(x_1 - x_2) + e^{i\Delta(k_1, k_2)} \theta(x_2 - x_1) \} e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)} \quad (2)$$

とかける。ここで $\theta(x) = \pm 1 (x \geq 0)$ である。 Δ は衝突に伴う位相のずれで、

$$\Delta(k_1, k_2) = \frac{1}{i} \ln \left\{ \frac{k_1 - k_2 + ic}{k_1 - k_2 - ic} \right\} \quad (3)$$

となる。次に N 体波動関数を (2) の拡張として次のような形に仮定する。

$$\chi_{k_1 \cdots k_N}(x_1, \cdots, x_N) = \prod_{i=1}^N e^{ik_i x_i} \prod_{j>i}^N \{ \theta(x_i - x_j) + e^{i\Delta(k_i, k_j)} \theta(x_j - x_i) \} \quad (4)$$

これが、Bethe Ansatz である。この N 体波動関数は (1) の固有状態であることが確かめられる。エネルギーは

$$E = \sum_{i=1}^N k_i^2 \quad (5)$$

で与えられる。ここで (4) が 0 にならないためには k_i はすべて異ってはいなくてはならない。

$c < 0$ の場合は、 $n (= 1, \cdots, \infty)$ ケの k_j の組

$$k_j = \frac{K}{n} + \frac{1}{2}(n-1-2j)ic \quad j = 1, \cdots, n \quad (6)$$

が束縛状態を作る。この状態のエネルギーは

$$E = n \left[\left(\frac{K}{n} \right)^2 - \frac{n^2 - 1}{12} c^2 \right] \quad (7)$$

となる。これは非線型シュレーディンガー方程式のソリトンの振動部分を量子化したものになっているので、これを量子ソリトンと見なすことができる。

$c > 0$ の場合、束縛状態は存在しない。有限の粒子密度の場合を考えると、(4) に対し周期的境界条件を課すことにより

$$k_i L = 2\pi I_i + \sum_{j \neq i} \Delta(k_i, k_j) \quad (8)$$

となる。ここで L は系の長さ、 I_i は量子数である。基底状態はエネルギー (5) を最小にするように、順に粒子がつまっている ($I_{i+1} - I_i = 1$)。状態密度を

$$\rho(k_i) = \frac{1}{L} \frac{1}{k_{i+1} - k_i} \quad (9)$$

と定義し、 i と $i+1$ に対し (8) の差をとり k を連続化すると、 $-k_F < k < k_F$ に粒子がある時、

$$2\pi\rho(k) = 1 + \int_{-k_F}^{k_F} \frac{2c}{(k-k')^2 + c^2} \rho(k') dk' \quad (10)$$

となり、基底エネルギー及び粒子数は

$$E = \int_{-k_F}^{k_F} k^2 \rho(k) dk, \quad N = \int_{-k_F}^{k_F} \rho(k) dk \quad (11)$$

となる。この基底状態からの励起は、1) $|k| = k_F \rightarrow |k| > k_F$, 2) $|k| < k_F \rightarrow |k| = k_F$ の 2 通りがある。1) の型の励起は自由ボーズ系でもあるが、2) の型は、自由ボーズ系では $k_F = 0$ のため存在しない。従って 2) 型の励起は非線型励起である。2) の励起のエネルギースペクトルを調べると、古典極限で、dark soliton 解に移行する²⁾。即ち、2) 型励起は量子化された dark soliton 解と考えられる。

§ 3. 統計力学

有限温度ではエネルギー最小でないため、 $I_{i+1} - I_i$ は 1 とは限らない。そこで、とばされた I_i の値に対しては空孔があると考え、前節と同様に、粒子、空孔の分布関数 $\rho(k)$, $\rho^h(k)$ を導入すると (10) を導いたと同様にして、

$$2\pi(\rho(k) + \rho^h(k)) = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2c}{(k-k')^2 + c^2} \rho(k') dk' \quad (12)$$

が得られる。自由エネルギーは

$$F = \int_{-\infty}^{\infty} k^2 \rho(k) dk - T \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \rho \ln \left(1 + \frac{\rho^h}{\rho} \right) + \rho^h \ln \left(1 + \frac{\rho}{\rho^h} \right) \right\} dk \quad (13)$$

となる。これを最小化し (12) と組合せると、 $\varepsilon(k) = T \ln(\rho^h/\rho)$ に対し、次の方程式が得られる、

$$\varepsilon(k) = k^2 - \mu - \frac{Tc}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln(1 + e^{-\varepsilon(k')/T}) \frac{dk'}{c^2 + (k-k')^2} \quad (14)$$

ここで μ は化学ポテンシャルである。自由エネルギーは、 $\varepsilon(k)$ を使って

$$F = \mu N - \frac{T}{2\pi} L \int_{-\alpha}^{\alpha} \ln(1 + e^{-\varepsilon(k)/T}) dk \quad (20)$$

(14) をとけば、(20) より種々の熱力学的量が求まる。

§ 4. 量子サイン・ゴールドン系への応用

我々は上記の方法を量子サイン・ゴールドン系に適用した。この系の束縛状態には基底状態からの励起として次のようなエネルギーを持つものがある。⁴⁾ ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha$ はパラメータ)

$$E = mch \frac{\pi \alpha_1}{2\mu} + mch \frac{\pi \alpha_2}{2\mu} \quad (\text{ソリトン-反ソリトン対に対応}) \quad (21)$$

$$E = 2m \sin \left\{ \frac{\pi(\pi-\mu)}{2\mu} j \right\} ch \frac{\pi \alpha}{2\mu} \quad (\text{ブリーザーに対応, } j=1, 2, \dots) \quad (22)$$

μ は結合定数から決まる定数である。(22) はブリーザーの振動部分が量子化されたものとみなすことができる。この他無限に束縛状態があるが、古典解との対応は明らかでない。この場合、無限個の束縛状態に対応して、無限個の連立積分方程式が得られるが、これらは $\pi/(\pi-\mu)$ が整数+0 の時有限個となり、数值的に解くことができる。⁵⁾ 比熱は図 1 のように求まる。ここで、非線型効果をひき出すため $j=1$ のブリーザーと同じ質量をもつ自由フォノンの比熱を差引いてある。 μ_s はソリトンの化学ポテンシャルであり、ミスフィットに対応する。 $\mu_s < m$ では基底状態でソリトンはなくソリトンやブリーザーが励起されるとともに増加し山をつくる。 μ_s をますますつれ励起エネルギーが下がり、 $\mu_s = m$ では低温で $T^{1/2}$ に比例する。 $\mu_s > m$ では、基底状態ではソリトン格子が量子効果で融けて“ソリトン流体”になっている。低温比熱は T に比例する。 μ_s が大きくなるにつれ、山は、ソリトン、反ソリトンの励起に対応して二つに分れる。これは更に古典系に近づく ($\mu \rightarrow \pi$) と $\mu_s < m$ でも見られる。

古典論では $\mu_s > m$ で、比熱の非線型部分は低温で負になり、低温側の山はない。従って $\mu_s > m$ での、低温の山は量子効果である。

以上の取扱いでは、連続体モデルのため、比熱全体の振舞は高温で T に比例し、等分配則を再現しない。そこで、現象論的にデバイ切断を導入して求めた比熱が図 2 である ($\mu_s = 0$)。この様な比熱は、デバイ比熱に非線型性による山が加わった

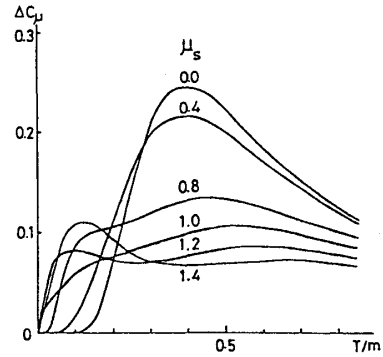


図 1 量子サイン・ゴールドン系の比熱の非線型部分。 $\mu = \frac{4}{5}\pi + 0$ 。
 μ_s はソリトンの化学ポテンシャル。

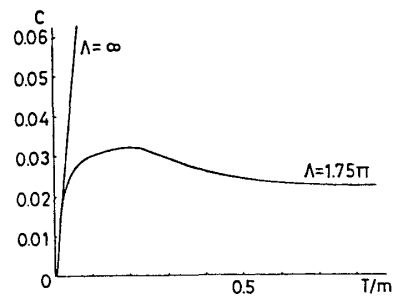


図 2 デバイ切断を入れた量子サイン・ゴールドン系の比熱。
 $\mu = \frac{249}{250}\pi + 0$ 。 $\mu_s = 0$ 。

石川正勝

ものとして定性的に理解することができる。

古典極限においては、低温に限り、ソリトンの寄与は、転送行列による結果を再現する。 j が有限のブリーザーの寄与は、自由フォノンの寄与を与え、デバイ切断を入れると等分配則を再現する。

この系の有限温度励起については、次の石川氏の報告を参照されたい。

この研究は、今田正俊（物性研）、石川正勝（道都短大）との共同研究である。

文 献

Review: H. B. Thacker Rev. Mod. Phys. **53** 253 (1981).

- 1) E. H. Lieb and W. Liniger P. R. **130** 1605 (1963); E. H. Lieb ibid. **130** 1616 (1963).
- 2) M. Ishikawa and H. Takayama JPSJ **49** 1242 (1980).
- 3) C. N. Yang and C. P. Yang J. Math. Phys. **10** 1115 (1969).
- 4) H. Bergknoff and H. B. Thacker P. R. **D19** 3666 (1979).
- 5) M. Imada, K. Hida, M. Ishikawa J. Phys. C **16** 35 (1983); K. Hida, M. Imada and M. Ishikawa 投稿中; M. Fowler and X. Zotos P. R. **B25** 5806 (1982); M. Fowler P. R. **B26** 2514 (1982).

また、量子サイン・ゴールドン系と関係の深いXYZスピン系及び8-vertex模型について R. J. Baxter Ann. Phys. **70** 193, 323 (1972)

またこの論文の詳しい解説が

桂重俊 物性研究 **38** 383 (1982)

この系の統計力学については

M. Takahashi and M. Suzuki PTP **48** 2187 (1972).

M. Takahashi PTP **50** 1519 (1973).

Massive Thirring—量子 sine Gordon 系の有限温度励起スペクトル

道都短大 石 川 正 勝

Massive Thirring—量子 sine Gordon (QSG) 系の有限温度における励起スペクトルについて、以下の結論¹⁾に関する報告を行なった。

① Zotos-Fowler (ZF)²⁾ は真木—高山 (MT)³⁾ の有限温度における励起スペクトルの理論を、ベーテ仮説 (BA) 法と関連付けて論じているが ZF の求めた励起スペクトルは等温励起